

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 - 008

Disjuncte open en gesloten verzamelingen in het complement van
een discrete ruimte in zijn Cech-Stone compactificatie

P.C. Baayen en A.B. Paalman - de Miranda



1963

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963-008

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Disjuncte open en gesloten verzamelingen in het complement
van een discrete ruimte in zijn Čech-Stone compactificatie

door

P.C. Baayen en A.B. Paalman - de Miranda

Zij N een discrete verzameling met machtigheid $|N| = \aleph_0$
en βN de Čech-Stone compactificatie van N .
Dan bevat $\beta N \setminus N$ $2^{\aleph_0}$ paarsgewijs disjuncte open en gesloten
verzamelingen:
zie Gillman and Jerison: Rings of continuous functions
p. 97.

Stelling: Zij D een discrete verzameling met $|D| = d \geq \aleph_0$
en βD de Čech-Stone compactificatie van D .
 $\beta D \setminus D$ bevat dan en slechts dan m paarsgewijs disjuncte
open en gesloten deelverzamelingen als $0 < m \leq d^{\aleph_0}$.

Bewijs:

Stel $D_1 \subset D$. Dan is $\beta D = \overline{D_1} \cup \overline{D \setminus D_1}$ en $\overline{D_1} \cap \overline{D \setminus D_1} = \emptyset$.
Iedere verzameling van de vorm $\overline{D_\alpha}$ met $D_\alpha \subset D$ is dus open
en gesloten in βD .

Stel nu A open en gesloten in βD .

Dan is $A \cap D = D_1 \neq \emptyset$ en $\beta D = \overline{D_1} \cup \overline{D \setminus D_1}$.

Daar $\overline{D_1} \subset \overline{A} = A$ en $\overline{D \setminus D_1} \subset \beta D \setminus A = \beta D \setminus A$ is $A = \overline{D_1}$.

We zullen nu bewijzen dat de verzamelingen van de vorm $\overline{D_1}$

met $D_1 \subset D$ een basis voor de open verzamelingen van βD vormen.

Stel O open in βD en $x \in O$. Dan is er, daar βD een compacte Hausdorff ruimte is, een open verzameling V met $x \in V \subset \bar{V} \subset O$. Zij nu $V \cap D = D_1$; dan $x \in \bar{D}_1 \subset \bar{V} \subset O$.

Stel nu A open en gesloten in $\beta D \setminus D$; dan is $A = O \setminus D$ met O open in βD .

Daar de $\bar{D}_\alpha$ met $D_\alpha \subset D$ een basis voor de open verzamelingen van βD vormen is $O = \bigcup_\alpha \bar{D}_\alpha$ met $D_\alpha \subset D$.

Dus $A = (\bigcup_\alpha \bar{D}_\alpha) \setminus D = \bigcup_\alpha (\bar{D}_\alpha \setminus D)$.

Daar A compact is en $\bar{D}_\alpha \setminus D$ open in $\beta D \setminus D$ is A te schrijven als $A = \bar{D}_{\alpha_1} \setminus D \cup \dots \cup \bar{D}_{\alpha_n} \setminus D = \bar{D}_\beta \setminus D$ met $D_\beta = \bigcup_{i=1}^n D_{\alpha_i}$.

Iedere open en gesloten verzameling in $\beta D \setminus D$ is dus van de vorm $\bar{D}_\alpha \setminus D$ en omgekeerd is ook iedere verzameling $\bar{D}_\alpha \setminus D$ open en gesloten in $\beta D \setminus D$.

We zullen nu bewijzen dat $\bar{D}_\alpha \setminus D \cap \bar{D}_\beta \setminus D = \emptyset$ dan en slechts dan als $|D_\alpha \cap D_\beta| < \aleph_0$.

Immers stel $D_\alpha \cap D_\beta = D_\gamma$ dan $\bar{D}_\alpha = \overline{D_\alpha \setminus D_\gamma \cup D_\gamma} = \overline{D_\alpha \setminus D_\gamma} \cup \bar{D}_\gamma$
en $\bar{D}_\beta = \overline{D_\beta \setminus D_\gamma \cup D_\gamma} = \overline{D_\beta \setminus D_\gamma} \cup \bar{D}_\gamma$

Dus $\bar{D}_\alpha \setminus D \cap \bar{D}_\beta \setminus D = \emptyset \iff \bar{D}_\gamma \subset D \iff |D_\gamma| < \aleph_0$.

$\beta D \setminus D$ bevat dus $\underline{m}$ paarsgewijs disjuncte open en gesloten deelverzamelingen dan en slechts dan als er een verzameling K van deelverzamelingen van D bestaat met $|K| = \underline{m}$ en $|D_\alpha \cap D_\beta| < \aleph_0$ voor $D_\alpha, D_\beta \in K$.

Stel nu K een dergelijke verzameling en $\underline{m} > \underline{d}$, dan is ook $|K'| = \underline{m}$ als $K' = \{D_\alpha \mid D_\alpha \in K \mid |D_\alpha| \geq \aleph_0\}$.

Stel nu $K'' = K'$ als $\bigcup_{D_\alpha \in K'} D_\alpha = D$, anders

$K'' = \{D_\alpha \mid D_\alpha \in K, \alpha \neq \alpha_1\} \cup D_{\alpha_1}^*$ met $D_{\alpha_1}^* = D_{\alpha_1} \cup D \setminus \bigcup_{D_\alpha \in K'} D_\alpha$.

K'' is dan een verzameling van deelverzamelingen van D met
 $|K''| = \underline{m}$, $|D_\alpha \cap D_\beta| < \aleph_0 \leq \min(|D_\alpha|, |D_\beta|)$ en $\bigcup_{D_\alpha \in K''} D_\alpha = D$.

Een dergelijke verdeling van D is dan en slechts dan
mogelijk als $\underline{m} \leq \underline{d}^{\aleph_0}$: zie Bachman, Transfinite Zahlen p.149.

Dus $\underline{d} < \underline{m} \leq \underline{d}^{\aleph_0}$.

Als $\underline{m} \leq \underline{d}$ dan is $\underline{m} \leq \underline{d}^{\aleph_0}$ en bestaat er dus een dergelijke
verdeling K'' en dus zeker een verdeling K .

q.e.d.